

Le processus de Galton-Watson critique s'éteint

Olivier GARET

11 octobre 2016

Résumé

Les chaînes de Galton-Watson, ou processus de branchements, font partie de la formation traditionnelle des étudiants en probabilité. Le théorème de base concerne l'étude de la survie du modèle en fonction de la fécondité : sauf cas dégénéré, la survie n'est possible que si le taux de fécondité dépasse 1. La preuve classiquement enseignée est essentiellement analytique, reposant sur les fonctions génératrices et des arguments de convexité. On se propose ici, s'inspirant des travaux de Bezuidenhout et Grimmett, de donner une preuve plus conforme à l'intuition probabiliste.

1 Introduction

S'inspirant d'un article de Grimmett et Marstrand sur certaines propriétés de la percolation en dimension $d \geq 3$, Bezuidenhout et Grimmett ont démontré dans un article célèbre que le processus de contact s'éteint au point critique. Leur technique de preuve a souvent été utilisée pour étudier la croissance des modèles de population.

Le présent texte se veut une introduction à leurs idées, dans le cadre de l'exemple simple du processus de Galton-Watson. On montrera ici qu'un processus de Galton-Watson non dégénéré ne peut s'éteindre que si sa fertilité dépasse strictement 1. La preuve classiquement enseignée – voir par exemple Benaïm–El Karoui [1] – est essentiellement analytique. Elle repose sur les fonctions génératrices et des arguments de convexité. La preuve présentée ici ne fait évidemment pas usage des fonctions génératrices et permet ainsi de retrouver une preuve plus conforme à l'intuition probabiliste.

2 Chaînes de Galton-Watson : définition et propriétés élémentaires

Soit ν, μ deux lois sur \mathbb{N} . ν est appelée loi de reproduction et μ est la loi de la taille de la population initiale.

On appelle chaîne de Galton-Watson de loi initiale μ et de loi de reproduction ν la chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition

$$p_{i,j} = \begin{cases} \nu^{*i}(j) & \text{si } i \neq 0 \\ \delta_0(j) & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

On peut fabriquer une telle chaîne comme suit : Soient $(X_i^n)_{i,j \geq 1}$ des variables aléatoires de loi ν et Y_0 une variable aléatoire de loi μ indépendante des $(X_i^n)_{i,j \geq 1}$. On définit par récurrence la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ par

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq Y_n} X_i^n.$$

Alors $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Galton-Watson de loi initiale μ et de loi de reproduction ν .

Si je note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i^k, i \geq 1, k \leq n)$ et $m = \int_{\mathbb{N}} x \, d\nu(x)$, on a classiquement

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}] = m\mathbb{E}[Y_n] \text{ et } \mathbb{E}[Y_n] = m^n \mathbb{E}[Y_0] \quad (1)$$

On pose $\tau = \inf\{n \geq 0; Y_n = 0\}$.

Théorème 1. Si $m < 1$, $\mathbb{P}(\tau > n) = O(m^n)$. En particulier $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$.

Démonstration. Avec (1), on a $\mathbb{P}(\tau > n) \leq \mathbb{P}(Y_n \geq 1) \leq \mathbb{E}[Y_n] = m^n \mathbb{E}[Y_0]$. \square

Théorème 2. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ sont deux chaînes de Galton-Watson indépendantes de même loi de reproduction ν , alors $(X_n + Y_n)_{n \geq 0}$ est encore une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction ν .

Démonstration. Comme $(X_n)_{n \geq 0}$ et $(Y_n)_{n \geq 0}$ sont des chaînes de Markov indépendantes, $((X_n, Y_n))_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, de matrice de passage

$$P_{(x,a),(y,b)} = \nu^{*x}(a) \nu^{*y}(b).$$

Notons $\mathbb{P}^{(x,y)}$ les lois des chaînes de Markov canoniquement associées. Il s'agit maintenant de montrer que si l'on pose $f(x, y) = x + y$, alors $(f(X_n, Y_n))_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Pour cela, il suffit de montrer que si $x + y = r$, alors $\mathbb{P}^{(x,y)}(f(X_1, Y_1) = p)$ ne dépend que r et p . Or, sous $\mathbb{P}^{(x,y)}$, X_1 et Y_1 sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives ν^{*x} et ν^{*y} , donc la loi de $f(X_1, Y_1)$ est $\nu^{*x} * \nu^{*y} = \nu^{*(x+y)} = \nu^{*r}$. Ainsi, $\mathbb{P}^{(x,y)}(f(X_1, Y_1) = p) = \nu^{*r}(\{p\})$ et $(X_n + Y_n)_{n \geq 0}$ est bien une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction ν . Comme la loi initiale est $\mathbb{P}_{X_0+Y_0} = \mathbb{P}_{X_0} * \mathbb{P}_{Y_0} = \mu_1 * \mu_2$, on a le résultat voulu. \square

Dans la suite on notera \mathbb{P}^i une probabilité sous laquelle une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Galton-Watson de loi initiale δ_i et de loi de reproduction ν .

Corollaire 1. Soient $n, p \geq 0$. On a

- Pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{P}^n(\tau < +\infty) = \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)^n$
- Pour $n, p \geq 0$ $\mathbb{P}^n(\tau < +\infty | \mathcal{F}_p) = \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)^{Y_p}$.
- Pour $n, p \geq 1$, on a $\mathbb{P}^n(\tau = +\infty) > 0 \iff \mathbb{P}^p(\tau = +\infty) > 0$.

Démonstration. Grâce au théorème 2 on a

$$\mathbb{P}^{n+1}(\tau < +\infty) = \mathbb{P}^n(\tau < +\infty) \mathbb{P}^1(\tau < +\infty),$$

d'où par récurrence $\mathbb{P}^n(\tau < +\infty) = \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)^n$. Cela donne le premier point. Avec la propriété de Markov, on obtient alors le deuxième point. Le dernier point est évident. \square

Corollaire 2. Soit $T \geq 1$. $(Y_{Tn})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction $\mathbb{P}_{Y_T}^1$.

Démonstration. Comme (Y_n) est une chaîne de Markov, il est bien connu que $(Y_{Tn})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Il reste à évaluer les probabilités de transition.

Soit $k \geq 1$. En appliquant $k-1$ fois le théorème 2, on voit que si $(Y_t^1)_{t \geq 0}, (Y_t^2)_{t \geq 0}, \dots, (Y_t^k)_{t \geq 0}$ sont des processus de Galton-Watson indépendants de lois initiales respectives δ_1 et de loi de reproduction ν , alors $(Y_t^1 + \dots + Y_t^k)_{t \geq 0}$ est un processus de Galton-Watson de loi initiale δ_k et de loi de reproduction ν . En conséquence

$$\mathbb{P}^k(Y_T = p) = \mathbb{P}(Y_T^1 + \dots + Y_T^k = p) = \mathbb{P}_{Y_T^1}^{*k}(p),$$

ce qui est le résultat voulu. \square

3 Une preuve probabiliste

3.1 Survie dans la zone surcritique

Théorème 3. *Si $m > 1$, alors $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) > 0$.*

Démonstration. Soit a avec $1 < a < m$. On a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int x \wedge M \, d\nu = \int x \, d\nu = m,$$

donc il existe M tel que $\int x \wedge M \, d\nu > a$. Pour $k \geq n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^k(Y_1 < na) &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k < na) \\ &\leq \mathbb{P}(X_1 \wedge M + \dots + X_n \wedge M < na) \\ &= \mathbb{P}(n\mathbb{E}[X_1 \wedge M] - (X_1 \wedge M + \dots + X_n \wedge M)) > (\mathbb{E}[X_1 \wedge M] - a)n) \\ &\leq \frac{\text{Var } X_1 \wedge M}{(\mathbb{E}[X_1 \wedge M] - a)n}, \end{aligned}$$

avec l'inégalité de Tchebitchev. Posons $\phi(k, x) = \mathbb{P}^k(Y_1 < x)$. Soit $n > c = \frac{\text{Var } (X_1 \wedge M)}{\mathbb{E}[X_1 \wedge M] - a}$. Avec la propriété de Markov, on a pour $A \in \mathcal{F}_t$ avec $A \subset \{Y_t \geq n\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap \{Y_{t+1} < an\}) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{Y_{t+1} < an}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y_{t+1} < an} | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \phi(Y_t, an)] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A c/n] = c/n \mathbb{P}(A), \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{P}(Y_{t+1} \geq an | A) \geq 1 - \frac{c}{n}$.

On en déduit par récurrence que pour $A_t = \bigcap_{i=1}^t \{Y_i \geq na^i\}$, on a

$$\mathbb{P}^n(A_t) \geq \prod_{i=0}^{t-1} \left(1 - \frac{c}{na^i}\right),$$

d'où $\mathbb{P}^n(\tau = +\infty) \geq \mathbb{P}^n(\forall t \geq 0 \quad Y_t \geq na^t) \geq \prod_{i=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{c}{na^i}\right) > 0$. □

3.2 La survie est une propriété locale

Théorème 4. *Soit $(Y_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Galton-Watson de loi de reproduction ν . On suppose que $\nu(0) > 0$. Alors on a équivalence entre*

- $\exists N, T \geq 1 \quad \mathbb{P}^N(Y_T \geq 2N) > \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) > 0$.

Avant de faire la preuve, donnons un aperçu des idées principales :

- Dans le sens direct, l'idée est de comparer la chaîne avec un processus de Galton-Watson surcritique, puis de conclure à l'aide du théorème 3.
- Le sens réciproque est ici assez simple, puisqu'il s'agit essentiellement de montrer que le nombre de particules explose dès qu'il y a survie. Toutefois, il faudra avoir à l'esprit que si l'évènement local est plus compliqué, cette partie-là sera en réalité la plus difficile.

Lemme 1. *Si il existe a et n positifs tels que $a\mathbb{P}^N(Y_1 \geq aN) > 1$, alors $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) > 0$.*

Démonstration. Soient X_i^n i.i.d. de loi ν . On pose $M_0 = 1$, $Y_0 = N$, puis

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq Y_n} X_i^n \text{ et } M_{n+1} = \sum_{i=1}^{M_n} aB_i^n,$$

avec $B_i^n = \mathbb{1}_{\{X_{(i-1)N+1}^n + \dots + X_{iN}^n \geq aN\}}$. On montre par récurrence que $Y_n \geq NM_n$. En effet, si $Y_n \geq NM_n$, on a

$$Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq Y_n} X_i^n \geq \sum_{1 \leq i \leq NM_n} X_i^n = \sum_{i=1}^{M_n} (X_{(i-1)N+1}^n + \dots + X_{iN}^n) \geq \sum_{i=1}^{M_n} aNB_i^n = NM_{n+1}.$$

(M_n) est une chaîne de Galton-Watson de fertilité $\mathbb{E}[aB_i^n] = a\mathbb{P}^N(Y_1 \geq aN) > 1$, donc qui peut survivre d'après le théorème 3. Par comparaison, (Y_n) peut survivre. \square

On remarquera que la preuve du lemme repose sur un argument de couplage : on fait vivre sur un même espace $(Y_n)_{n \geq 0}$ et un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $(1-q)\delta_0 + q\delta_a$, avec $q = \mathbb{P}^N(Y_1 \geq aN)$.

Preuve du théorème. D'après le corollaire 2, $(Y_{nT})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Galton-Watson. On peut donc lui appliquer le lemme avec $a = 2$: $(Y_{nT})_{n \geq 0}$ peut survivre, donc $(Y_n)_{n \geq 0}$ peut survivre.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) > 0$, soit $\mathbb{P}^1(\tau < +\infty) < 1$. Comme $\mathbb{P}^N(\tau < +\infty) = \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)^N$, donc on peut choisir N tel que $\mathbb{P}^N(\tau < +\infty) < 1/2$.

On a vu que $\mathbb{P}^N(\tau < +\infty | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)^{Y_t}$. Comme $\mathbb{P}^1(\tau < +\infty) \geq \mathbb{P}^1(Y_1 = 0) = \nu(0) > 0$, on peut écrire

$$Y_t = \frac{\log \mathbb{P}^N(\tau < +\infty | \mathcal{F}_t)}{\log \mathbb{P}^1(\tau < +\infty)}.$$

Or le théorème de convergence des martingales dit que

$$\mathbb{E}^N[\mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}^N(\tau < +\infty | \mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}} \quad \mathbb{P}^N \text{ p.s.}$$

lorsque t tend vers l'infini.

En particulier, sur l'événement $\{\tau < +\infty\}$, $\mathbb{P}^N(\tau < +\infty | \mathcal{F}_t)$ tend presque sûrement vers 0 et Y_t tend presque sûrement vers l'infini. On a donc presque sûrement l'inégalité

$$\mathbb{1}_{\{\tau = +\infty\}} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\{Y_t \geq 2N\}}.$$

Avec le lemme de Fatou, il vient

$$\mathbb{P}^N(\tau = +\infty) = \mathbb{E}^N(\mathbb{1}_{\{\tau = +\infty\}}) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^N[\mathbb{1}_{\{Y_t \geq 2N\}}] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^N(Y_t \geq 2N)$$

Comme $\mathbb{P}^N(\tau = +\infty) > 1/2$, il existe T tel que $\mathbb{P}^N(Y_T \geq 2N) > 1/2$. \square

3.3 Étude du cas critique

Théorème 5. Si $\nu(0) > 0$ et $m = 1$, alors $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) = 0$.

Preuve 1. Il suffit de noter que quels que soient $N, T \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}^N(Y_T \geq 2N) \leq \frac{\mathbb{E}^N(Y_T)}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

et d'appliquer la contraposée du théorème 4. \square

On va voir une deuxième preuve, un peu plus longue, mais aussi plus robuste. Cette méthode a notamment été utilisée dans Garet-Marchand [3] pour l'étude des marches aléatoires branchantes en milieu aléatoire.

Preuve 2. Supposons par l'absurde que l'on a non seulement $\nu(0) > 0$ et $m = 1$ mais aussi $\mathbb{P}^1(\tau = +\infty) > 0$.

D'après le théorème 4 (sens réciproque), on peut choisir n et T tels que $\mathbb{P}^N(Y_T \geq 2N) > \frac{1}{2}$.

L'idée est alors de coupler la chaîne avec une chaîne sous-critique. Soient $(X_i^n)_{i,j \geq 1}$ des variables aléatoires de loi ν , $(B_i^n)_{i,j \geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes des (X_i^t) . On pose $Y_0 = N$, $Y_0^p = N$, puis

$$\forall n \geq 0 \quad Y_{n+1} = \sum_{1 \leq i \leq Y_n} X_i^n \text{ et } Y_{n+1}^p = \sum_{1 \leq i \leq Y_n^p} B_i^n X_i^n.$$

Par continuité séquentielle croissante,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \mathbb{P}^N(\max(Y_i, 0 \leq i \leq T) \leq M, Y_T \geq 2N) = \mathbb{P}^N(Y_T \geq 2N) > 1/2,$$

donc il existe M tel que $\mathbb{P}(\max(Y_i, 0 \leq i \leq T) \leq M, Y_T \geq 2N) > 1/2$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_T^p \geq 2N) &\geq \mathbb{P}(Y_T \geq 2N, \forall i \leq T \quad Y_i^p = Y_i) \\ &\geq \mathbb{P}\left(\begin{array}{c} \max(Y_i, 0 \leq i \leq T) \leq M, Y_T \geq 2N, \\ \forall (t, i) \in \{0, \dots, T-1\} \times \{1, \dots, M\} \quad B_i^t = 1 \end{array}\right) \\ &= \mathbb{P}(\max(Y_i, 0 \leq i \leq T) \leq M, Y_T \geq 2N) p^{TM} \end{aligned}$$

Si on prend $p < 1$ suffisamment grand, on a

$$\mathbb{P}(\max(Y_i, 0 \leq i \leq T) \leq M, Y_T \geq 2N) p^{TM} > 1/2,$$

donc $\mathbb{P}(Y_T^p \geq 2N) > 1/2$. Or (Y_t^p) est un processus de Galton-Watson de loi de reproduction $B_1^1 X_1^1$ et de loi initiale δ_N , donc d'après le théorème 4 (sens direct), ce processus de Galton-Watson peut survivre. Mais

$$\mathbb{E}[B_1^1 X_1^1] = \mathbb{E}[B_1^1] \mathbb{E}[X_1^1] = pm = p < 1,$$

donc d'après le théorème 1, le processus ne peut survivre. Contradiction. \square

Références

- [1] Michel Benaïm and Nicole El Karoui. *Promenade aléatoire : Chaines de Markov et simulations ; martingales et stratégies*. Ecole Polytechnique, 2004.
- [2] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4) :1462–1482, 1990.
- [3] Olivier Garet and Régine Marchand. The critical branching random walk in a random environment dies out. *Electron. Comm. Probab.*, 18(9) :1–15 (electronic), 2013.
- [4] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 430(1879) :439–457, 1990.